第 30 講　微分法・積分法(3)

【基礎確認事項】

［1］　方程式への応用

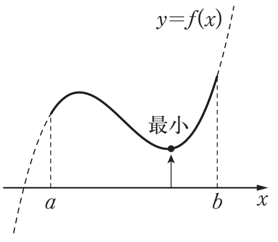
□方程式として $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ と x 軸（$y=0$）との共有点の x 座標として表される．また，方程式 $f(x)-g(x)=0$　すなわち　$f(x)=g(x)$ の実数解は，曲線（直線も含む）$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標として表される．

　したがって，方程式の実数解の個数やその正負などは，関数の増減，極大・極小などを調べ，グラフを描くことによって知ることができる．

⇒　C&U 1

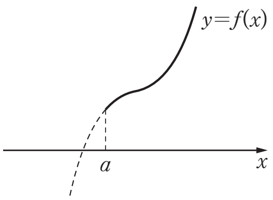
［2］　不等式への応用

□区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ を証明するには，この区間における最小値が 0 または正であることを示せばよい．

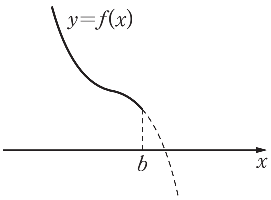


□特に区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f'(x) \geqq 0$，つまり単調増加のときは，区間の左端における関数の値 $f(a)$ が 0 以上であればよい．

　また，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f'(x) \leqq 0$，つまり単調減少のときは，区間の右端における関数の値 $f(b)$ が 0 以上であればよい．



単調増加



単調減少

□$f(x) \geqq g(x)$ を証明する主な手法として，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの上下関係や共有点を調べる方法と，$f(x)-g(x) \geqq 0$ を示す，すなわち $h(x)=f(x)-g(x)$ とおいて $h(x) \geqq 0$ を示す方法がある．

⇒　C&U 2

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　方程式 $4x^3-6x^2+1=0$ の実数解の個数とその正負を調べよ.

2　次の不等式を証明せよ.

(1)　$x>0$ のとき　$(x+1)^3>6x^2+1$

(2)　$x^4+3 \geqq 4x$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第30講　微分法・積分法(3)

1　x についての方程式 $3x^4-4x^3-12x^2-a=0$ が次の条件をみたすように，定数 a の値の範囲を求めよ．

(1)　4個の異なる実数解をもつ．

(2)　2個の異なる正の実数解のみもつ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-x$ へ異なる3本の接線が引けるとする．このような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$x \geqq 0$ において常に不等式　$x^3 - 3ax^2 + 4a > 0$ が成り立つように定数 a の範囲を定めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　微分法・積分法(3)

［1］　3 次方程式 $2x^3+3ax^2+a+2=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ a の値の範囲は

$-\boxed{\text{ア}}<a<-\boxed{\text{イ}}$ である.

［2］　$x\geqq-2$ のとき $-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+b<0$　がつねに成立するような b の値の範囲

は　$b<-\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　微分法・積分法(3)

【CHECK & UP】

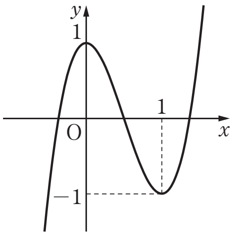
1　$f(x)=4x^3-6x^2+1$ とおくと

$f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

よって $f(x)$ の増減は下表.

グラフは右下図.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-1	↗



よって

実数解は 3 個　　2 個は正，1 個は負

3 次方程式において因数分解が困難な場合でも，その解の存在する範囲を絞り込むことができる．そのために必要なのが 3 次関数のグラフである．

この問題では，極大値が正，極小値が負であるため，グラフの形状から x 軸と 3 回交わることがわかる．すなわち 3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもつ，ということである．

また，その 3 解は，$x<0$，$0<x<1$，$1<x$ に 1 つずつ存在することがわかる．今回は正負のみを答える問題であるが，グラフを用いた解の存在範囲の重要性を認識しておきたい．

2　(1)　$f(x)=(x+1)^3-(6x^2+1)=x^3-3x^2+3x$　とおくと

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2 \geqq 0$

よって，$f(x)$ はつねに増加する関数である．

また，$f(0)=0$

したがって，$x>0$ においてつねに $f(x)>0$

つまり　$x>0$ のとき　$(x+1)^3>6x^2+1$　が成り立つ．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	↗		↗

(2)　$f(x)=x^4-4x+3$　とおくと

$f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=4(x-1)(x^2+x+1)$

$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$　より　$f(x)$ の増減は右表.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

よって $f(x)$ の最小値は 0 より　$f(x)\geqq 0$　つまり　$x^4-4x+3\geqq 0$

したがって　$x^4+3\geqq 4x$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　微分法・積分法(3)

1　x についての方程式 $3x^4-4x^3-12x^2-a=0$ が次の条件をみたすように，定数 a の値の範囲を求めよ.

(1)　4 個の異なる実数解をもつ.

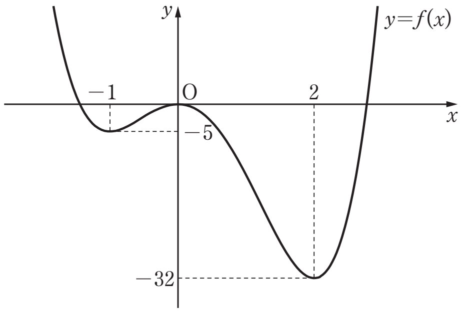
(2)　2 個の異なる正の実数解のみもつ.

$3x^4-4x^3-12x^2-a=0$　より　$3x^4-4x^3-12x^2=a$

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ とおくと,

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)=12x(x+1)(x-2)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗



$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数を考える.

(1)　グラフより $\boldsymbol{-5<a<0}$

(2)　グラフより $\boldsymbol{-32<a<-5}$

2　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-x$ へ異なる 3 本の接線が引けるとする. このような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ.

$y=x^3-x$ より　$y'=3x^2-1$

$x=t$ における接線は　$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$　つまり　$y=(3t^2-1)x-2t^3$　……①

①が $(a,\ b)$ を通るとき　$b=(3t^2-1)a-2t^3$　つまり　$2t^3-3at^2+a+b=0$　……②

3 次関数は接点が異なれば接線も異なる. よって②が異なる 3 実数解をもてば,

それに応じて①より条件を満たす 3 本の接線が引ける.

$f(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とおくと，$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$a=0$ のとき　$f'(t)=6t^2\geqq 0$ より　$f(t)$ は単調増加.

よって $f(t)=0$ は 1 解のみもち不適.

$a\neq 0$ のとき　$f(t)$ は 2 極値 $f(0)$，$f(a)$ をもつ.

よって　$f(0)\times f(a)<0$　であれば②は異なる 3 実数解をもつ.

$f(0)\times f(a)=(a+b)(-a^3+a+b)<0$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

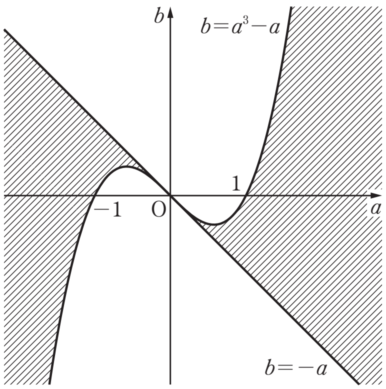
$\begin{cases} a+b>0 \\ -a^3+a+b<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} a+b<0 \\ -a^3+a+b>0 \end{cases}$

つまり

$\begin{cases} b>-a \\ b<a^3-a \end{cases}$ または $\begin{cases} b<-a \\ b>a^3-a \end{cases}$

したがって，求める存在範囲は右図斜線部.

（境界含まず）



3　$x \geqq 0$ において常に不等式　$x^3-3ax^2+4a>0$ が成り立つように定数 a の範囲を定めよ.

$f(x)=x^3-3ax^2+4a$　とおくと　$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$2a<0$　つまり　$a<0$ のとき

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=4a$

よって　$4a>0$　つまり　$a>0$ であればよいが,

これは $a<0$ を満たさず不適.

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$4a$	↗

$2a=0$　つまり　$a=0$ のとき

$f'(x)=3x^2 \geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加.

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=4a$

よって　$4a>0$　つまり　$a>0$　であればよいが，$a=0$ を満たさず不適.

$2a>0$　つまり　$a>0$ のとき

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(2a)=-4a^3+4a$

よって　$-4a^3+4a>0$　　$a(a+1)(a-1)<0$

$a<-1$，$0<a<1$　　　$a>0$ より　$0<a<1$

x	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4a$	↘	$-4a^3+4a$	↗

以上より，求める a の範囲は　$\mathbf{0<a<1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　微分法・積分法(3)

［1］ 3 次方程式 $2x^3+3ax^2+a+2=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ a の値の範囲は

$-$ ア $<a<-$ イ である.

［2］ $x \geqq -2$ のとき $-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+b<0$ がつねに成立するような b の値の範囲

は $b<-\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ である.

［1］ $f(x)=2x^3+3ax^2+a+2$ とおき，$y=f(x)$ が x 軸と異なる 3 交点をもつときを考える.

$f'(x)=6x^2+6ax=6x(x+a)$

$a=0$ のとき　$f'(x)=6x^2 \geqq 0$　より $f(x)$ は単調増加.

よって $y=f(x)$ と x 軸との交点はただ 1 つとなり不適.

$a \neq 0$ のとき　$x=0$，$-a$ で $f'(x)=0$ となり，$f(x)$ は 2 極値

$f(0)=a+2$　　$f(-a)=a^3+a+2=(a+1)(a^2-a+2)$　をもつ.

3 つの実数解をもつには $f(0)\times f(-a)<0$　　$(a+2)(a+1)(a^2-a+2)<0$

$a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$　より　$(a+2)(a+1)<0$　　よって　$-2<a<-1$

以上より求める a の範囲は　$\mathbf{-2<a<-1}$　である.

［2］ $-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+b<0$　より　$b<\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$

よって $y=b$ のグラフが $x \geqq -2$ においてつねに $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$ より下であればよい.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$　とおくと

$f'(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{7}{6}$	↘	$-\frac{10}{3}$	↗

$f(x) \geqq -\frac{10}{3}$　より　$b<f(x)$ が $x \geqq -2$ において常に成立するときの b の範囲は

$b<-\mathbf{\frac{10}{3}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。